§ 4.1 矩阵的定义

定义 4.1.1. 一个 $m\times n$ 的矩阵为由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的阵列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

记作 $A=(a_{ij})_{m\times n}$

$\longrightarrow$ A 的第 (i,j) 元素

a_{ii} 称为 A 的对角元

$A=B \overset{def}{\Longleftrightarrow}$?

例： n 维行向量 := $1\times n$ 矩阵 $\quad a=(a_1,\cdots,a_n)$

n 维列向量 := $n\times 1$ 矩阵 $\quad \tilde{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

名称与记号：

1) 零矩阵
2) n 阶方阵
3) 单位阵
4) 数量矩阵
5) 对角矩阵
6) 上(下)三角矩阵
7) (反)对称矩阵
8) 整数矩阵，有理~

，实~，复~，多项式~，数域 F 上的~

§4.2 矩阵的运算

§4.2.1 加法与数乘

$A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$, $\lambda\in F$

$$A+B:=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A:=(\lambda a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\leadsto$ $A-B=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$ $\quad -A=(-a_{ij})_{m\times n}$

注：行列相同才可以相加减

定理 4.2.1 $A,B,C\in F^{m\times n}$, $\lambda,\mu\in F$

(1) + 交换律： $A+B=B+A$

(2) + 结合律： $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 有零矩阵： $A+O=A=O+A$

(4) 有负矩阵： $A+(-A)=O=(-A)+A$

(5) 分配律： $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ $\quad \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

(6) · 结合律： $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

(7) · 单位元： $1\cdot A=A$

② 证：直接验证 □.

基本矩阵：

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n} & \leftarrow i\text{行} \\ \uparrow j\text{列} & \end{array}$$

$$\forall\ A = (a_{ij})_{m\times n} \Rightarrow A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$$

§4.4.2 矩阵的乘法

固定一数域 F

$A = (a_{ij})_{m\times n}$, $a_{ij} \in F$

$$\Downarrow \quad \begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_m = a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{A} : F^n \longrightarrow F^m \qquad \leftarrow \text{线性映射}$$

$\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n) \mapsto \vec{x} = (x_1, \cdots, x_m)$ （即：保持加法和数乘）

$$B = (b_{ij})_{n \times p} \qquad b_{ij} \in F$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = b_{11} z_1 + b_{12} z_2 + \cdots + b_{1p} z_p \\ y_2 = b_{21} z_1 + b_{22} z_2 + \cdots + b_{2p} z_p \\ \cdots \\ y_n = b_{n1} z_1 + b_{n2} z_2 + \cdots + b_{np} z_p \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{B} : F^p \to F^m \qquad \vec{z} \mapsto \vec{y}$$

$$\Rightarrow \quad F^p \xrightarrow{\mathcal{A} \circ \mathcal{B}} F^n \qquad \vec{z} \mapsto \vec{x}$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{p} b_{kj} z_j \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right) \cdot z_j$$

$\sum$ 的性质

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad C := (c_{ij})_{m \times p}$$

定义： $A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}\in F^{n\times p}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ & \cdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\cdots+a_{1n}b_{n1}, & \cdots, & a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+\cdots+a_{1n}b_{np} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\cdots+a_{mn}b_{n1}, & \cdots, & a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+\cdots+a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

即 $AB := (c_{ij})_{m\times p}\in F^{m\times p}$ 其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$.

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$AB=?$, $BA=?$ $CD=?$ $DC=?$ $C^2:=CC=?$

$D^2:=DD=?$

例 $A=(a_{ij})$, $B=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_m)$, $C=\mathrm{diag}(c_1\cdots c_n)$

$BA=?$, $AC=?$

注：1) A的列数 = B的行数

2) $AB \neq BA$

3) $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ 或 $B = 0$

4) $\lambda I \cdot A = \lambda A$

定理 4.22.

1) × 结合律： $(AB)C = A(BC)$

2) × 单位元： $IA = A = AI$

3) $(A+B)C = AC + BC$

4) $A(B+C) = AB + AC$

5) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

证：(1) $$\big((AB)C\big)_{ij} = \sum_{l=1}^{p} (AB)_{il} \cdot c_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

$$\big(A(BC)\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (BC)_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \qquad \square$$